I 실수와 그 연산

“야구장의 홈에서 2루까지의 거리, 원의 둘레의 길이나 넓이를 구할 때 필요한 π 등은 정수나 유리수가 아니다.
이와 같이 자연수, 정수, 유리수만으로는 우리 생활 주변의 모든 현상을 나타낼 수 없기 때문에 새로운 수, 즉 실수의 도입이 필요하다.
실수의 연산은 수학의 기본 기능으로, 실생활뿐만 아니라 타 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 기초가 된다.”

배운 내용

- 정수와 유리수(중1)
- 유리수와 순환소수, 피타고라스 정리(중2)

이 단원에서는

Ⅰ-1 제곱근의 뜻과 성질
무리수와 실수

Ⅰ-2 근호를 포함한 식의 계산

배울 내용

- 복소수와 이차방정식(고등학교 수학)

| 준비 학습 |

1 다음을 계산하시오. 중1

(1) 5^2　　(2) $(-3)^2$

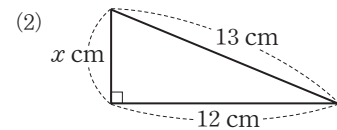
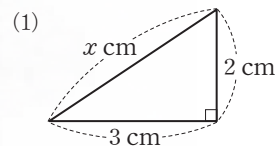
(3) $(-0.4)^2$　　(4) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$

2 다음을 계산하시오. 중2

(1) $(2x+4y)-(x-5y)$　　(2) $4(a-7b)+2(-b+8a)$

3 다음 직각삼각형에서 x^2의 값을 구하시오. 중2

(1)

(2)

대단원 포트폴리오

이 단원을 학습하면서 다음 중에서 하나를 선택하여 작성해 보자.

- ☐ 수학 달력　☐ 수학 게임　☐ 수학 포스터
- ☐ 수학 만화　☐ 수학사 보고서　☐ 수학 비주얼 싱킹

● 포트폴리오 예시와 길잡이 ▶ 226쪽

1

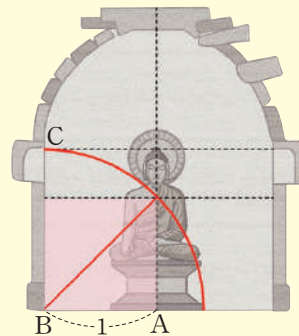
제곱근과 실수

수학 + 건축

동양의 조화로운 비로 일컬어지는 금강비는 정사각형의 한 변의 길이와 한 대각선의 길이의 비이다. 우리 선조들은 오랜 경험을 통해 금강비가 균형미와 안정감이 있다고 여겨 이를 건축물이나 예술 작품에 반영하였다.

우리나라의 대표적인 문화유산인 첨성대, 부석사 무량수전, 석굴암에서도 금강비를 찾아볼 수 있다.

(참고 자료: 오혜정, "수학 언어로 문화재를 읽다")

단원 활동 석굴암에 숨어 있는 금강비를 이용하여 새로운 수에 대해 알아보자.

활동 1 색칠한 정사각형의 한 변인 $\overline{AB}$의 길이가 1이고, $\overline{BC}$의 길이는 이 정사각형의 한 대각선의 길이와 같을 때, $\overline{BC}^2$의 값을 구해 보자.

활동 2 다음 수 중에서 제곱했을 때 **활동 1**에서 구한 값에 가장 가까운 수를 계산기를 이용하여 찾아보자.

1.4 　　 1.414 　　 1.4142

알게 된 것 ▶ 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이에 가장 가까운 수를 찾을 수 있다. 　예 ☐ 　아니요 ☐

학습할 내용 ▶ 제곱근의 뜻과 성질 　▶ 무리수와 실수

학습 계획

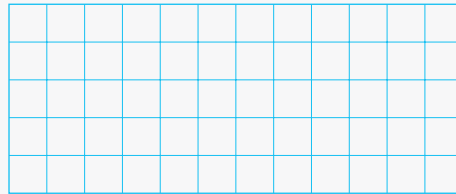
학습 계획안 예시
- 예습과 복습을 열심히 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.
- 수학에 대한 자신감을 키우겠다.
- 모둠 활동에 적극적으로 참여하겠다.

제곱근의 뜻과 성질

• 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

제곱근은 무엇일까?

개 념 열 기

다음은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이이다.

1 넓이가 1, 4, 9인 정사각형을 모눈종이 위에 각각 그려 보고, 오른쪽 표의 빈칸을 알맞게 채우시오.

정사각형의 넓이	정사각형의 한 변의 길이
1	
4	
9	

2 정사각형의 넓이와 한 변의 길이 사이에는 어떤 관계가 있는지 말하시오.

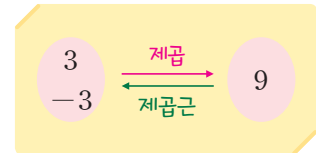
3과 -3을 각각 제곱하면 9가 된다. 즉,

$$3^2=9,\quad (-3)^2=9$$

이다.

이와 같이 어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉

$$x^2=a$$

일 때 x를 a의 **제곱근**이라고 한다.

제곱하여 0이 되는 수는 0뿐이므로 0의 제곱근은 0이다. 또 양수나 음수를 제곱하면 항상 양수가 되므로 음수의 제곱근은 생각하지 않는다.

스스로 확인하기

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

(1) $4^2=16$, $(-4)^2=16$이므로 16의 제곱근은 4와 -4이다.

(2) $0.5^2=0.25$, $(-0.5)^2=0.25$이므로 0.25의 제곱근은 ☐와 ☐이다.

다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 49 (2) 121 (3) 0.09 (4) $\frac{64}{25}$

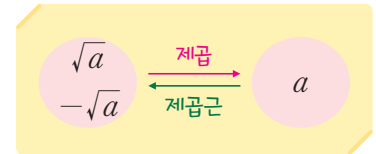
일반적으로 양수의 제곱근은 양수와 음수 2개가 있고, 그 두 수의 절댓값은 서로 같다.

양수 a의 제곱근 중에서 양수인 것을 양의 제곱근, 음수인 것을 음의 제곱근이라 하고, 기호 $\sqrt{}$를 써서

양의 제곱근은 $\sqrt{a}$

음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$

와 같이 나타낸다.

$\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$ —제곱→ a, a —제곱근→ $\sqrt{a}$, $-\sqrt{a}$

> 기호 $\sqrt{}$는 뿌리(root)를 뜻하는 라틴어 radix의 머리글자 r를 변형하여 만든 것이다.

이때 기호 $\sqrt{}$를 **근호**라 하고, $\sqrt{a}$를 '제곱근 a' 또는 '루트 a'라고 읽는다.

또 $\sqrt{a}$와 $-\sqrt{a}$를 한꺼번에 $\pm\sqrt{a}$로 나타내기도 한다.

스스로 확인하기

(1) 2의 양의 제곱근은 $\sqrt{2}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{2}$이고 이것을 한꺼번에 $\pm\sqrt{2}$로 나타내기도 한다.

(2) 5의 양의 제곱근은 ☐, 음의 제곱근은 ☐이고 이것을 한꺼번에 ☐로 나타내기도 한다.

문제 02

다음을 근호를 사용하여 나타내시오.

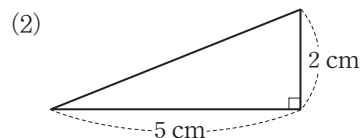
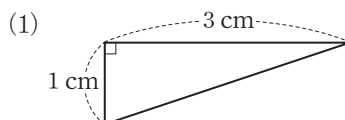
(1) 3의 제곱근 (2) 제곱근 19

(3) 0.5의 양의 제곱근 (4) $\frac{5}{7}$의 음의 제곱근

문제 03

다음 직각삼각형에서 빗변의 길이를 근호를 사용하여 나타내시오.

(1)

(2) 2 cm, 5 cm

◆ 제곱근에는 어떤 성질이 있을까?

$\sqrt{3}$과 $-\sqrt{3}$은 3의 제곱근이므로

$$(\sqrt{3})^2=3,\quad (-\sqrt{3})^2=3$$

이다.

한편 $5^2=25$, $(-5)^2=25$이고, 25의 양의 제곱근은 5이므로

$$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5,\quad \sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$$

이다.

일반적으로 다음이 성립한다.

> **제곱근의 성질**
>
> $a>0$일 때
>
> ❶ $(\sqrt{a})^2=a$, $(-\sqrt{a})^2=a$ ❷ $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{(-a)^2}=a$

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

스스로 확인하기

(1) $(\sqrt{7})^2=7$, $(-\sqrt{7})^2=7$

(2) $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\square$, $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\square$

다음 값을 구하시오.

(1) $(\sqrt{13})^2$

(2) $\left(-\sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2$

(3) $\sqrt{29^2}$

(4) $\sqrt{(-0.5)^2}$

$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$와 같이 근호 안의 수가 어떤 유리수의 제곱이면 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

다음을 근호를 사용하지 않고 나타내시오.

(1) $\sqrt{36}$

(2) $-\sqrt{169}$

(3) $\sqrt{\frac{4}{25}}$

(4) $-\sqrt{0.64}$

제곱근의 성질을 이용하면 주어진 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어 식을 계산할 수 있다.

다음을 계산하시오.

(1) $(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{12})^2$ (2) $\sqrt{(-9)^2}\times\sqrt{121}$

풀이 (1) $(\sqrt{6})^2=6$, $(-\sqrt{12})^2=12$이므로 $(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{12})^2=6+12=18$

(2) $\sqrt{(-9)^2}=9$, $\sqrt{121}=\sqrt{11^2}=11$이므로 $\sqrt{(-9)^2}\times\sqrt{121}=9\times11=99$

답 (1) 18 (2) 99

다음을 계산하시오.

(1) $(-\sqrt{3})^2+\sqrt{100}$

(2) $\sqrt{(-5)^2}-(\sqrt{1.5})^2$

(3) $\sqrt{(-9)^2}\times\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

(4) $\sqrt{(-2)^2}\div\sqrt{\frac{9}{25}}$

추론 | 문제 해결

추론하고 문제를 해결할 때는

- 관찰과 추측으로 수학적 사실을 이끌어 낸다.
- 해결 방법을 수립하고 실행한다.

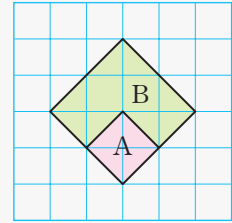
다음 세 학생에게 주어진 식의 계산 결과가 5가 되도록 하려고 한다. 빈칸에 알맞은 수를 근호를 사용하여 각각 3개 이상 쓰시오.

제곱근의 대소는 어떻게 비교할까?

개 념 열 기

오른쪽 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이 위에 크기가 다른 두 정사각형 A, B를 겹쳐 그린 것이다.

1 다음 표의 빈칸을 알맞게 채우시오.

정사각형	A	B
넓이		
한 변의 길이		

2 두 정사각형 A, B의 한 변의 길이의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내시오.

위의 개념 열기에서 두 정사각형 A, B의 넓이는 각각 2, 8이므로 그 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$이다.

그런데 정사각형의 넓이가 클수록 그 한 변의 길이도 길므로 $2<8$이면 $\sqrt{2}<\sqrt{8}$임을 알 수 있다.

한편 정사각형의 한 변의 길이가 길수록 그 넓이도 크므로 $\sqrt{2}<\sqrt{8}$이면 $2<8$임을 알 수 있다.

일반적으로 다음이 성립한다.

제곱근의 대소 관계

$a>0$, $b>0$일 때

❶ $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ❷ $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$

스스로 확인하기

(1) 2와 $\sqrt{3}$의 대소를 비교하면 $2=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}$이고 $\sqrt{4}>\sqrt{3}$이므로 $2>\sqrt{3}$이다.

(2) 6과 $\sqrt{35}$의 대소를 비교하면 $6=\sqrt{\square^2}=\sqrt{\square}$이고 $\sqrt{\square}\ \bigcirc\ \sqrt{35}$이므로 $6\ \bigcirc\ \sqrt{35}$이다.

문제 07 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt{33}$, $\sqrt{12}$ (2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{5}{6}}$ (3) $\sqrt{15}$, 4

02 무리수와 실수

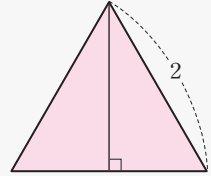
• 무리수의 개념을 이해하고, 실수의 대소 관계를 판단할 수 있다.

무리수는 무엇일까?

개 념 열 기

오른쪽 그림은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

1 피타고라스 정리를 이용하여 정삼각형의 높이를 구하시오.

2 계산기를 이용하여 **1**에서 구한 길이를 소수로 나타내시오.

유리수는 $\frac{a}{b}$ ($b\neq0$, a, b는 정수)의 꼴로 나타낼 수 있는 수이다.

정수가 아닌 유리수는

$$\frac{1}{2}=0.5,\quad \frac{2}{3}=0.\dot{6},\quad \frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$$

과 같이 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있고, 또 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 유리수임을 배웠다.

그런데 수 중에는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 없는 수가 있다.

위의 개념 열기에서 정삼각형의 높이는 $\sqrt{3}$이다.

$\sqrt{3}$을 소수로 나타내면

$$\sqrt{3}=1.7320508075688772\cdots$$

와 같이 순환소수가 아닌 무한소수임이 알려졌다.

따라서 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

이와 같이 유리수가 아닌 수를 **무리수**라고 한다. 즉, 무리수는 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수이다.

스스로 확인하기

(1) $\pi=3.141592653589793238\cdots$은 순환소수가 아닌 무한소수이므로 무리수이다.

(2) $1+\sqrt{3}=1+1.7320508075688772\cdots$

$=2.7320508075688772\cdots$

는 (순환소수, 순환소수가 아닌 무한소수)이므로 (유리수, 무리수)이다.

근호를 사용하여 나타낸 수 중에는 유리수도 있고 무리수도 있다.

예를 들어

$$\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3, \quad -\sqrt{\frac{4}{25}}=-\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=-\frac{2}{5}$$

와 같이 근호 안의 수가 어떤 유리수의 제곱이면 그 수는 유리수이다. 그러나

$$\sqrt{13}, \quad -\sqrt{0.7}$$

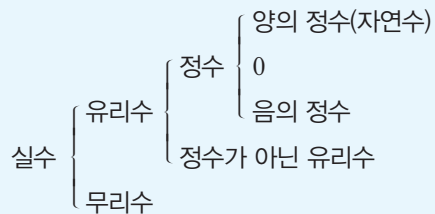
과 같이 근호 안의 수가 어떤 유리수의 제곱이 아니면 그 수는 무리수이다.

데데킨트
(Dedekind, J. W. R., 1831～1916)
독일의 수학자. 무리수와 실수의 뜻을 명확히 하였다.

유리수와 무리수를 통틀어 **실수**라고 한다.

실수를 분류하면 다음과 같다.

실수의 분류

- 실수
  - 유리수
    - 정수
      - 양의 정수(자연수)
      - 0
      - 음의 정수
    - 정수가 아닌 유리수
  - 무리수

| 참고 | 특별한 말이 없을 때 수라고 하면 실수를 뜻한다.

다음 수 중에서 무리수를 모두 찾으시오.

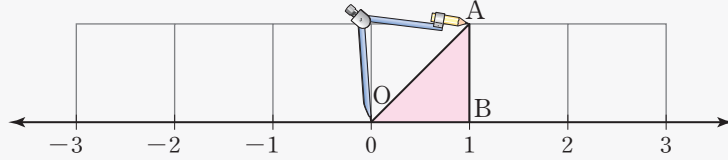
$\sqrt{19}$ $\quad$ $\sqrt{25}-5$ $\quad$ $-\sqrt{\frac{11}{8}}$ $\quad$ $7+\sqrt{30}$ $\quad$ $\sqrt{0.49}$

조리개는 카메라에서 렌즈를 통과하는 빛의 양을 조절하는 장치이다.

카메라 렌즈를 둘러싸고 있는 원통 모양의 겉면에 쓰여 있는 값을 조리갯값이라고 한다. 이 조리갯값은 $\sqrt{2}$의 어림한 값인 1.4부터 시작하여 약 $\sqrt{2}$배씩 커진다. 이와 같이 우리 생활 주변에서 무리수가 적용되는 예를 찾으시오.

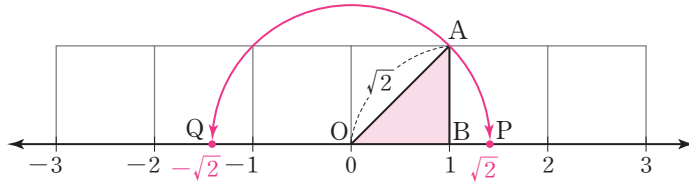
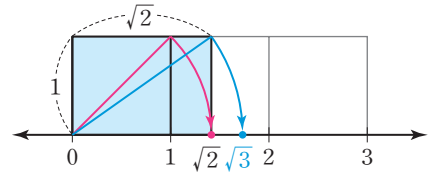
실수의 대소는 어떻게 비교할까?

개념 열기

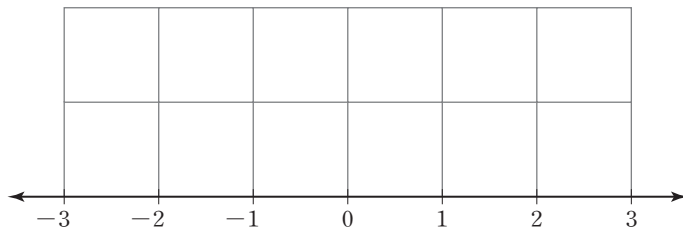
다음 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이 위에 수직선을 그린 것이다.

1 위의 직각삼각형 AOB에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{OA}$의 길이를 구하시오.

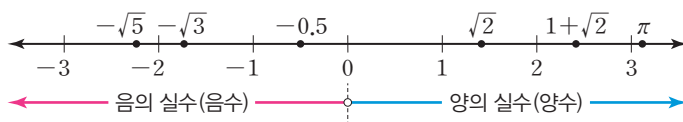
2 $\sqrt{2}$와 $-\sqrt{2}$에 대응하는 점을 각각 수직선 위에 나타내시오.

위의 개념 열기에서 △AOB는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 이용하면 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이다.

따라서 다음 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 그릴 때 원과 수직선이 만나는 두 점 P, Q에 대응하는 수는 각각 무리수 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이다.

또 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 $\sqrt{2}$, 세로의 길이가 1인 직사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{3}$임을 이용하면 수직선 위의 한 점에 무리수 $\sqrt{3}$을 대응시킬 수 있다.

이와 같이 유리수뿐만 아니라 무리수에 대응하는 점들도 수직선 위에 나타낼 수 있다.

일반적으로 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있음이 알려졌다. 따라서 한 실수는 수직선 위의 한 점에 대응하고, 또 수직선 위의 한 점에는 한 실수가 반드시 대응한다.

문제 03 다음 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이 위에 수직선을 그린 것이다. $\sqrt{5}$와 $-\sqrt{5}$에 대응하는 점을 각각 수직선 위에 나타내시오.

수직선 위에서 원점의 오른쪽에 있는 점에는 양의 실수가 대응하고, 왼쪽에 있는 점에는 음의 실수가 대응한다. 이때 간단히 양의 실수를 양수, 음의 실수를 음수라고 한다.

예를 들어 다음 수직선에서 $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, π는 양수이고 -0.5, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$는 음수이다.

모든 실수는 수직선 위의 점에 대응하므로 유리수와 마찬가지로 수직선 위에서 오른쪽에 있는 점에 대응하는 실수가 왼쪽에 있는 점에 대응하는 실수보다 크다.

한편 두 실수 a, b의 대소 관계는 $a-b$의 값의 부호에 따라 다음과 같이 정할 수 있다.

실수의 대소 관계

a, b가 실수일 때

❶ $a-b>0$이면 $a>b$

❷ $a-b=0$이면 $a=b$

❸ $a-b<0$이면 $a<b$

다음 두 실수의 대소를 비교하시오.

(1) $1+\sqrt{5}$, 3 (2) $\sqrt{6}-4$, -1

(1) $(1+\sqrt{5})-3=\sqrt{5}-2$

이때 $\sqrt{5}-2=\sqrt{5}-\sqrt{4}>0$이므로

$1+\sqrt{5}>3$

(2) $(\sqrt{6}-4)-(-1)=\sqrt{6}-4+1=\sqrt{6}-3$

이때 $\sqrt{6}-3=\sqrt{6}-\sqrt{9}<0$이므로

$\sqrt{6}-4<-1$

답 (1) $1+\sqrt{5}>3$ (2) $\sqrt{6}-4<-1$

다음 두 실수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt{3}+4$, 5 (2) $1-\sqrt{11}$, -2

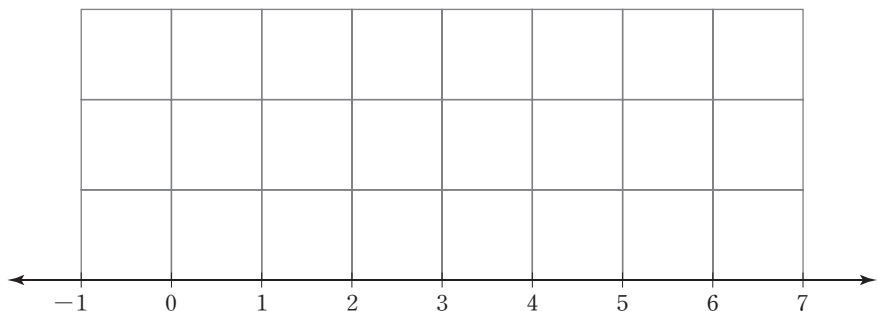
추론 | 문제 해결

추론하고 문제를 해결할 때는

✔ 관찰과 추측으로 수학적 사실을 이끌어 낸다.

✔ 해결 방법을 수립하고 실행한다.

다음 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이 위에 수직선을 그린 것이다. 아래 세 실수에 대응하는 점을 수직선 위에 각각 나타내어 세 실수의 대소를 비교하시오.

$\sqrt{10}$ $6-\sqrt{5}$

◆ 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값을 어떻게 소수로 나타낼까?

개 념 열 기

오른쪽 그림은 계산기를 이용하여 $\sqrt{2}$의 값을 구한 것이다. 계산기 화면에 나타난 수를 소수점 아래 넷째 자리에서 반올림하여 나타내시오.

제곱근을 어림한 값은 계산기나 제곱근표를 이용하여 소수로 나타낼 수 있다.

제곱근표는 1.00부터 9.99까지의 수는 0.01 간격으로, 10.0부터 99.9까지의 수는 0.1 간격으로 그 수의 양의 제곱근의 값을 소수점 아래 넷째 자리에서 반올림하여 나타낸 것이다.

이 책의 278~281쪽에 제곱근표가 실려 있다.

다음은 이 책의 278쪽에 실려 있는 제곱근표의 일부이다. 이 제곱근표를 이용하여 $\sqrt{1.46}$을 어림한 값을 소수로 나타내 보자.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300

위의 표에서 1.4의 가로줄과 6의 세로줄이 만나는 칸에 적혀 있는 수는 1.208이므로 $\sqrt{1.46}$을 어림한 값을 소수로 나타내면 1.208이다.

제곱근표를 이용하여 다음 제곱근의 값을 소수로 나타내시오.

(1) $\sqrt{3.28}$　　(2) $\sqrt{7.2}$

(3) $\sqrt{51.4}$　　(4) $\sqrt{87.3}$

중단원 학습 점검

개념 정리

- **제곱근**
  ❶ $x^2=5$일 때, x는 5의 제곱근이다.
  ❷ 5의 제곱근은 $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ ➔ 한꺼번에 나타내면 $\pm\sqrt{5}$
  ($\sqrt{5}$: 양의 제곱근, $-\sqrt{5}$: 음의 제곱근)
- **제곱근의 성질**
  ❶ $(\sqrt{2})^2=2$, $(-\sqrt{2})^2=2$ ❷ $\sqrt{2^2}=2$, $\sqrt{(-2)^2}=2$
- **제곱근의 대소 관계**
  ❶ $2<3$이면 $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ ❷ $\sqrt{2}<\sqrt{3}$이면 $2<3$
- **무리수**
  $\sqrt{5}=2.23606797\cdots$, $\pi=3.14159265\cdots$와 같이 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수
- **실수의 대소 관계**
  a, b가 실수일 때
  ❶ $a-b>0$이면 $a>b$
  ❷ $a-b=0$이면 $a=b$
  ❸ $a-b<0$이면 $a<b$

O, X 문제

다음 문장이 옳으면 O, 옳지 않으면 X를 ( ) 안에 쓰시오.

1 6의 제곱근은 $\pm\sqrt{6}$이다. ( )

2 $\sqrt{(-3)^2}$은 -3이다. ( )

3 $8<9$이므로 $\sqrt{8}<3$이다. ( )

4 $\sqrt{16}$은 유리수이다. ( )

5 3.14는 무리수이다. ( )

6 $2+\sqrt{3}$은 3보다 크다. ( )

기초 문제

1 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 9 (2) 11

(3) 0.16 (4) $\frac{5}{13}$

2 다음 값을 구하시오.

(1) $(\sqrt{11})^2$ (2) $\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2$

(3) $\sqrt{\frac{16}{81}}$ (4) $-\sqrt{(-7)^2}$

3 다음에 해당하는 것을 보기에서 모두 찾으시오.

보기

ㄱ. $\sqrt{7}$ ㄴ. $-0.\dot{3}\dot{5}$

ㄷ. π ㄹ. $-\sqrt{100}$

(1) 무리수

(2) 실수

4 다음 두 실수의 대소를 비교하여 빈칸에 부등호 $<$, $>$ 중에서 알맞은 것을 쓰시오.

(1) $\sqrt{10}$ ☐ $\sqrt{20}$

(2) $-\sqrt{3}$ ☐ $-\sqrt{5}$

(3) 5 ☐ $\sqrt{24}$

(4) $4+\sqrt{3}$ ☐ $4+\sqrt{7}$

기본 문제

5 $(-4)^2$의 양의 제곱근을 a, 5^2의 음의 제곱근을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

6 다음 중에서 나머지 셋과 다른 값을 갖고 있는 학생을 찾으시오.

7 다음을 계산하시오.

(1) $(\sqrt{3})^2-(-\sqrt{49})$

(2) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\times\sqrt{\frac{36}{25}}$

8 $\sqrt{24n}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값을 구하시오.

9 다음 보기 중에서 옳은 것을 모두 찾으시오.

보기

ㄱ. 무한소수로 나타내어지는 수는 모두 무리수이다.

ㄴ. 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다.

ㄷ. 수직선 위의 한 점에는 한 실수가 반드시 대응한다.

ㄹ. 두 무리수 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$ 사이에는 유리수가 없다.

10 다음 세 수 a, b, c의 대소 관계를 부등호를 써서 나타내시오.

$a=3+\sqrt{3}$ $\quad b=4 \quad$ $c=5-\sqrt{2}$

도전 문제

11 두 실수 a, b에 대하여 $a-b<0$이고 $ab<0$일 때, 다음을 간단히 하시오.

$\sqrt{a^2}-(\sqrt{b})^2-\sqrt{(-4b)^2}+\sqrt{(2b-a)^2}$

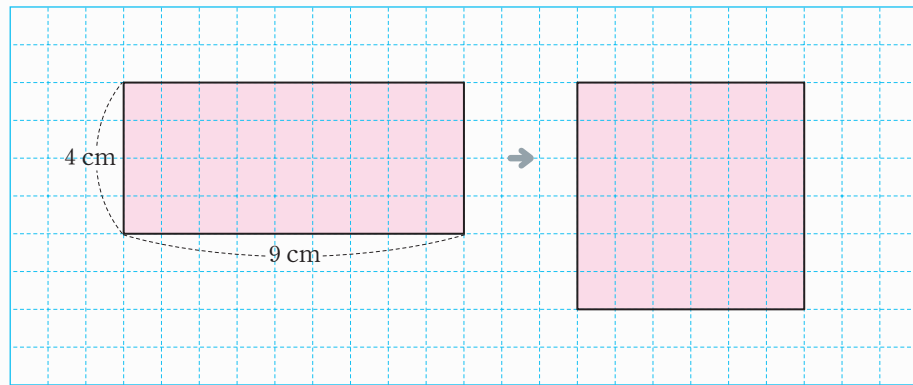
스스로 푸는 자기 주도 학습 수학 익힘책 ▶ 230쪽

수행 과제 직사각형을 정사각형으로 만들어 볼까?

문제 해결 의사소통

활동 목표 직사각형을 제곱근을 이용하여 정사각형으로 만들 수 있다.

1 다음 그림은 직사각형 모양의 종이를 세 조각으로 자른 다음, 세 조각을 빈틈없이 이어 붙여서 넓이가 같은 정사각형 모양으로 만든 것이다. 이때 직사각형을 세 조각으로 자르는 두 선분을 어떻게 정하면 되는지 설명하고, 모눈종이 위에 그 두 선분을 그어 보자.

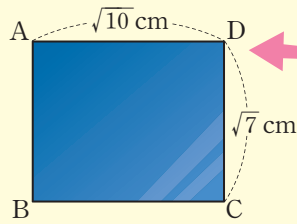
(단, 모눈종이 한 칸의 가로와 세로의 길이는 각각 1 cm이다.)

2 가로의 길이가 a cm, 세로의 길이가 b cm인 직사각형 모양의 종이를 넓이가 같은 정사각형 모양으로 만드는 과정을 설명해 보자. (단, $a>b$)

2 근호를 포함한 식의 계산

수학 + 과학

태양 에너지는 환경 문제를 거의 일으키지 않는 청정에너지로 자연에서 무한히 얻을 수 있다. 그러나 태양 에너지를 직접 사용하는 것은 어렵기 때문에 태양 전지를 이용하여 전기 에너지로 변환하여 사용한다.

이때 태양 전지를 이용하여 생산되는 전력량은 태양 전지의 총넓이에 비례한다.

단원 활동 태양 전지의 넓이를 이용하여 제곱근의 계산에 대해 알아보자.

활동 1 위의 태양 전지 ABCD에서 제곱근표를 이용하여 $\overline{AD}$, $\overline{DC}$의 길이를 각각 소수로 나타내고, 이를 이용하여 태양 전지 ABCD의 넓이를 소수로 나타내 보자.

(단, 소수점 아래 넷째 자리에서 반올림한다.)

활동 2 활동 1의 태양 전지의 넓이를 나타내는 수를 제곱근표에서 찾아 다음 빈칸을 채워 보자.

 위의 활동으로 **알게 된 것**과 **나의 학습 계획**을 적어 보자.

알게 된 것 ▶ 태양 전지의 넓이를 이용하여 $\sqrt{10}\times\sqrt{7}$의 값을 근호를 사용하여 나타낼 수 있다. 예 □ 아니요 □

학습할 내용 ▶ 근호를 포함한 식의 계산

학습 계획

학습 계획안 예시
- 예습과 복습을 열심히 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.
- 수학에 대한 자신감을 키우겠다.
- 모둠 활동에 적극적으로 참여하겠다.

근호를 포함한 식의 계산

• 근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있다.

제곱근의 곱셈과 나눗셈은 어떻게 할까?

개 념 열 기

다음 빈칸에 알맞은 수를 쓰고, 계산 결과를 비교하시오.

1 $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{\square^2}$

$=2\times\square=\square$

$\sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=\sqrt{\square^2}=\square$

2 $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{\square^2}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{\square}{3}$

$\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\left(\square\right)^2}=\square$

실수의 곱셈에서도 유리수의 곱셈과 같이 교환법칙, 결합법칙이 성립한다. 이를 이용하여 두 수 $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$와 $\sqrt{3\times5}$가 같은지 알아보자.

$\sqrt{3}\times\sqrt{5}$는 양수이고, 이를 제곱하면

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}\times\sqrt{5})^2&=(\sqrt{3}\times\sqrt{5})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5})\\&=(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{5}\times\sqrt{5})\\&=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{5})^2\\&=3\times5\end{aligned}$$

교환법칙, 결합법칙

이므로 $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$는 3×5의 양의 제곱근이다.

그런데 3×5의 양의 제곱근은 $\sqrt{3\times5}$이므로

$$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times5}$$

이다.

또 두 수 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$과 $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$이 같은지 알아보자.

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$은 양수이고, 이를 제곱하면

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2}=\frac{3}{5}$$

이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$은 $\dfrac{3}{5}$의 양의 제곱근이다.

그런데 $\frac{3}{5}$의 양의 제곱근은 $\sqrt{\frac{3}{5}}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

이다.

일반적으로 다음이 성립한다.

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$는 곱셈 기호 ×를 생략하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}$로 나타내기도 한다.

제곱근의 곱셈과 나눗셈

$a>0$, $b>0$일 때

❶ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

❷ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

스스로 확인하기

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

(1) $\sqrt{3}\sqrt{11}=\sqrt{3\times11}=\sqrt{33}$

(2) $\sqrt{5}\sqrt{2}=\sqrt{\square\times\square}=\sqrt{\square}$

(3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$

(4) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{\square}{\square}}=\sqrt{\square}$

문제 01 다음을 간단히 하시오.

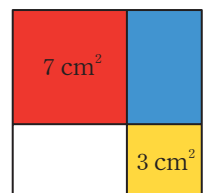
(1) $\sqrt{7}\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{\frac{21}{5}}\sqrt{\frac{10}{3}}$

(3) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}}$

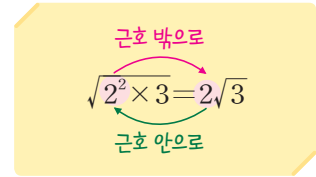
(4) $\sqrt{56}\div\sqrt{8}$

문제 02 오른쪽 정사각형에서 빨간색 정사각형의 넓이는 7 cm^2이고, 노란색 정사각형의 넓이는 3 cm^2일 때, 파란색 직사각형의 넓이를 구하시오.

7 cm^2	
	3 cm^2

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}$과 같이 근호 안의 수에 제곱인 수가 있으면 이것을 근호 밖으로 꺼내어 나타낼 수 있다. 즉,

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{2^2}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

또 $3\sqrt{5}$와 같은 수는 근호 밖의 양수를 제곱하여 근호 안에 넣을 수 있다. 즉,

$$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{45}$$

$a\sqrt{b}$의 꼴로 나타낼 때, 일반적으로 근호 안의 수는 가장 작은 자연수가 되도록 한다.

일반적으로 $a>0$, $b>0$일 때, 다음이 성립한다.

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$$

다음 수를 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{24}$　　(2) $-\sqrt{63}$

(3) $\sqrt{300}$　　(4) $\sqrt{128}$

다음 수를 $\sqrt{a}$ 또는 $-\sqrt{a}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $3\sqrt{3}$　　(2) $-4\sqrt{2}$

(3) $7\sqrt{\frac{6}{7}}$　　(4) $\frac{\sqrt{75}}{5}$

겨울철에 야생 동물에게 먹이를 주기 위해 지면으로부터 h m의 높이에 떠 있는 헬리콥터에서 먹이를 떨어뜨렸을 때, 먹이가 지면에 닿을 때까지 걸리는 시간은 $\sqrt{\frac{h}{4.9}}$초라고 한다. 98 m의 높이에서 먹이를 떨어뜨렸을 때, 먹이가 지면에 닿을 때까지 걸리는 시간을 $a\sqrt{b}$의 꼴로 나타내시오.

근호를 포함한 식의 계산에서 곱셈과 나눗셈이 섞여 있을 때는 유리수의 경우와 마찬가지로 앞에서부터 차례로 계산한다. 이때 나눗셈은 분수 꼴로 바꾸어 계산하거나 역수를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 고쳐서 계산한다.

다음을 계산하시오.

(1) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\div\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{18}\div\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{10}}$

풀이 (1) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\div\sqrt{3}=6\sqrt{12}\div\sqrt{3}=\frac{6\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=6\sqrt{\frac{12}{3}}$

$=6\sqrt{4}=6\times2=12$

(2) $\sqrt{18}\div\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\sqrt{18}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{90}{3}}\times\frac{2}{\sqrt{10}}$

$=\sqrt{30}\times\frac{2}{\sqrt{10}}=2\sqrt{\frac{30}{10}}=2\sqrt{3}$

답 (1) 12 (2) $2\sqrt{3}$

다음을 계산하시오.

(1) $3\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\div7\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{28}\div\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}}{4}$

문제를 해결하고 설명할 때는

- 수학적 표현의 의미를 이해한다.
- 자신의 의견을 논리적으로 설명한다.

다음 두 학생의 대화에서 재연이가 한 말이 옳은지 옳지 않은지 말하고, 그 이유를 설명하시오.

◆ 수의 분모를 어떻게 유리화할까?

개 념 열 기

다음 물음에 답하시오.

1 무리수 $\sqrt{2}$에 어떤 수를 곱하면 유리수가 되는지 말하시오.

2 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$의 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치시오.

위의 개념 열기 **2**에서 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$의 분모와 분자에 각각 $\sqrt{2}$를 곱하면

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

과 같이 분모를 유리수로 고칠 수 있다.

이와 같이 분모가 근호가 있는 무리수일 때, 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것을 **분모의 유리화**라고 한다.

일반적으로 다음이 성립한다.

분모의 유리화

$a>0$, $b>0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

스스로 확인하기

빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

(1) $\dfrac{2}{5\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5\times3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{15}$

(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{\square}}=\dfrac{\sqrt{7}\sqrt{\square}}{2\sqrt{\square}\sqrt{\square}}=\dfrac{\sqrt{\square}}{6}$

문제 07 다음 수의 분모를 유리화하시오.

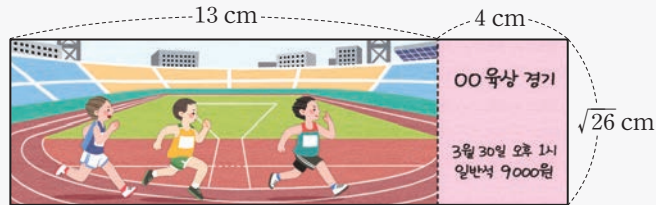
(1) $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

(2) $\dfrac{9}{4\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{45}}$

제곱근의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 할까?

개 념 열 기

다음 그림은 가로의 길이가 17 cm이고 세로의 길이가 $\sqrt{26}$ cm인 직사각형 모양의 입장권이다.

1 왼쪽 직사각형과 오른쪽 직사각형의 넓이의 합을 식으로 나타내시오.

2 입장권 전체의 넓이를 (가로의 길이)×(세로의 길이)로 나타내시오.

3 **1**, **2**의 결과를 등식으로 나타내시오.

위의 개념 열기에서 왼쪽 직사각형과 오른쪽 직사각형의 넓이의 합은 $(13\sqrt{26}+4\sqrt{26})$ cm²이고, 입장권 전체의 넓이는 $(13+4)\sqrt{26}$ cm²이므로

$$13\sqrt{26}+4\sqrt{26}=(13+4)\sqrt{26}=17\sqrt{26}$$

이다.

위의 등식은 다음과 같이 $\sqrt{26}$을 하나의 문자 a로 생각하여 계산한 것과 같다.

$$13a \ + \ 4a \ = \ (13+4)a \ = \ 17a$$

$$13\sqrt{26}+4\sqrt{26}=(13+4)\sqrt{26}=17\sqrt{26}$$

일반적으로 제곱근의 덧셈과 뺄셈은 다항식의 덧셈과 뺄셈에서 동류항끼리 모아서 계산하듯이 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

스스로 확인하기

(1) $8\sqrt{5}-4\sqrt{5}=(8-4)\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

(2) $3\sqrt{2}+7\sqrt{3}-\sqrt{2}-4\sqrt{3}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}+7\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=(3-\square)\sqrt{2}+(7-\square)\sqrt{3}$

$=\square\sqrt{2}+\square\sqrt{3}$

다음을 계산하시오.

(1) $4\sqrt{10}+2\sqrt{10}$

(2) $5\sqrt{13}-9\sqrt{13}$

(3) $2\sqrt{3}-\sqrt{7}-4\sqrt{3}+2\sqrt{7}$

(4) $8\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

근호를 포함한 식의 계산에서는 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}(a>0,\ b>0)$임을 이용하거나 분모를 유리화하여 계산한다.

다음을 계산하시오.

(1) $5\sqrt{2}-\sqrt{18}$

(2) $\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{4}{\sqrt{7}}$

(1) $5\sqrt{2}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(5-3)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(2) $\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{4\sqrt{7}}{7}=\frac{7\sqrt{7}}{14}-\frac{8\sqrt{7}}{14}$

$=\left(\frac{7}{14}-\frac{8}{14}\right)\sqrt{7}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$

답 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{7}}{14}$

다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{27}-2\sqrt{12}$

(2) $\sqrt{32}-\frac{5}{\sqrt{2}}$

(3) $3\sqrt{28}-\sqrt{63}+2\sqrt{7}$

(4) $\sqrt{20}+\frac{4}{\sqrt{2}}-3\sqrt{5}$

근호를 포함한 식의 계산에서 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있을 때는 유리수의 경우와 마찬가지로 곱셈과 나눗셈을 먼저 한다. 또 괄호가 있는 경우에는 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼 다음 계산한다.

예제 3

다음을 계산하시오.

(1) $3\sqrt{5}-2\div\sqrt{5}$　　　(2) $\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{12}$

풀이 (1) $3\sqrt{5}-2\div\sqrt{5}=3\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\left(3-\frac{2}{5}\right)\sqrt{5}=\frac{13\sqrt{5}}{5}$

(2) $\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{12}=\sqrt{6}\times\sqrt{2}-\sqrt{6}\times\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{12}-\sqrt{18}+2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

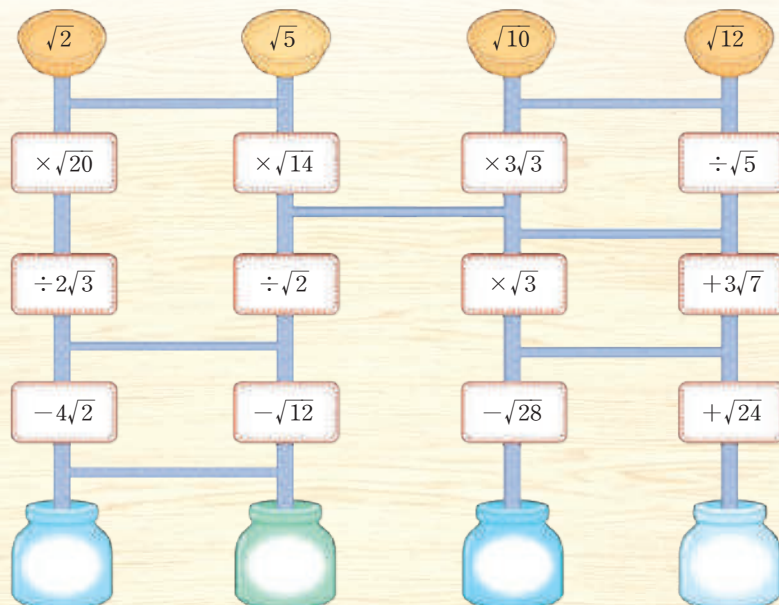
답 (1) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$　(2) $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

문제 10

다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}-2\div\sqrt{3}$　　　(2) $(\sqrt{18}-2\sqrt{6})\div\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sqrt{3}-5)$

문제 11

다음 그림에서 선을 따라 내려가면서 식을 만든 후, 빈칸에 식을 계산한 결과를 쓰시오.
(단, 선을 따라 내려갈 때 가로선을 만나면 옆으로, 세로선을 만나면 아래로 이동한다.)

1 다음을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{7}$

(2) $3\sqrt{2}\times(-2\sqrt{5})$

(3) $10\sqrt{45}\div2\sqrt{9}$

(4) $\left(-\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}\right)\div\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)$

---

2 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

(3) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$

(4) $\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{7}}$

---

3 다음을 계산하시오.

(1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-\sqrt{2}$

(2) $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{12}+\sqrt{27}$

(4) $\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{6}{\sqrt{5}}$

---

4 다음을 계산하시오.

(1) $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{40}\div\sqrt{8}-\sqrt{45}$

(3) $\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{6})-\sqrt{3}$

(4) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-(1+\sqrt{3})$

중단원 학습 점검

정답 및 해설 ▶ 244쪽

개념 정리

- **제곱근의 곱셈과 나눗셈**
  ❶ $\sqrt{3}\times\sqrt{15}=\sqrt{3\times15}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}$
  ❷ $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{15}{3}}=\sqrt{5}$ 근호 밖으로
- **분모의 유리화**
  분모가 근호가 있는 무리수일 때, 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하여 분모를 유리수로 고치는 것
  ➔ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ ← 유리수
- **제곱근의 덧셈과 뺄셈**
  ❶ $3\sqrt{2}+\sqrt{2}=(3+1)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$
  ❷ $5\sqrt{6}-3\sqrt{6}=(5-3)\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

O, X 문제

다음 문장이 옳으면 O, 옳지 않으면 X를 (　) 안에 쓰시오.

1 $\sqrt{2}\sqrt{3}$을 간단히 하면 $\sqrt{6}$이다. (　)

2 $\sqrt{12}$는 $3\sqrt{2}$로 나타낼 수 있다. (　)

3 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$의 분모를 유리화하면 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다. (　)

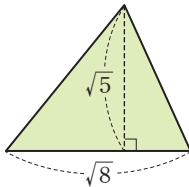
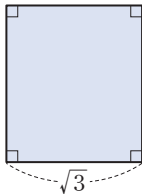
4 $5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$을 계산하면 $3\sqrt{3}$이다. (　)

기초 문제

1 다음 도형에 대하여 빈칸에 알맞은 수를 쓰시오.

(1)

밑변의 길이	$\sqrt{8}$
높이	$\sqrt{5}$
넓이	

(2)

가로의 길이	$\sqrt{3}$
세로의 길이	
넓이	$\sqrt{12}$

2 다음 수를 $\sqrt{a}$의 꼴은 $b\sqrt{c}$의 꼴로, $b\sqrt{c}$의 꼴은 $\sqrt{a}$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sqrt{18}$　　(2) $-\sqrt{45}$

(3) $2\sqrt{6}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{3}$

3 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

(3) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$　　(4) $\dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

4 다음 보기 중에서 계산 결과가 옳은 것을 모두 찾으시오.

보기
ㄱ. $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=7\sqrt{10}$
ㄴ. $\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-3\sqrt{2}$
ㄷ. $\sqrt{3}+4\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{3}=5\sqrt{7}$

기본 문제

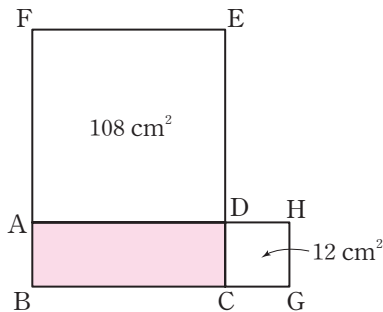
5 다음을 계산하시오.

(1) $5\sqrt{6}\times3\sqrt{3}\div5\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\div\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

6 $6\sqrt{3}=\sqrt{a}$, $\sqrt{126}=b\sqrt{14}$일 때, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$의 값을 구하시오.

7 $\sqrt{2.7}=a$, $\sqrt{53}=b$일 때, $\sqrt{27000}-\sqrt{0.53}$을 a, b를 사용하여 나타내면 $xa+yb$이다. 이때 유리수 x, y의 값을 각각 구하시오.

8 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD에서 변 AD, DC를 각각 한 변으로 하는 정사각형 ADEF, DCGH를 그렸더니 그 넓이가 각각 $108\ \text{cm}^2$, $12\ \text{cm}^2$이었다. 이때 직사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.

9 $8\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{18}+\sqrt{20}-\sqrt{5}=a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$일 때, a, b의 값을 각각 구하시오.

(단, a, b는 유리수)

10 다음을 계산하시오.

$$\sqrt{27}\left(\sqrt{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\frac{3}{\sqrt{2}}(\sqrt{8}-1)$$

도전 문제

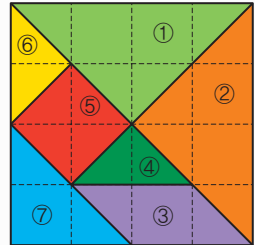
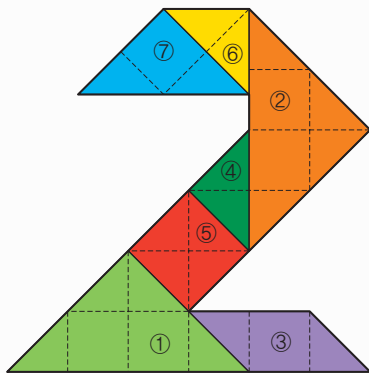
11 윗변의 길이와 아랫변의 길이의 비가 3 : 5인 사다리꼴이 있다. 이 사다리꼴의 높이를 한 변의 길이로 하는 정사각형의 넓이가 $200\ \text{cm}^2$이고 사다리꼴의 넓이도 이와 같다고 할 때, 사다리꼴의 윗변의 길이와 아랫변의 길이를 각각 구하시오.

스스로 푸는 자기 주도 학습 수학 익힘책 ▶ 231쪽

수행 과제 칠교판으로 숫자를 만들어 볼까?

문제 해결

활동 목표 칠교판으로 만든 모양의 둘레의 길이를 구할 수 있다.

칠교판은 정사각형 모양의 나무 또는 종이를 정사각형 1개, 평행사변형 1개, 직각삼각형 5개로 나누어 만든 것이다.
오른쪽 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이 위에 칠교판을 그린 것이다. 이 칠교판으로 다음 활동을 해 보자.

1 칠교판으로 다음과 같이 숫자 2를 만들고, 숫자 2 모양의 둘레의 길이를 구해 보자.

2 칠교판으로 다른 숫자나 동물 모양 등을 만들고, 그 둘레의 길이를 구해 보자.

모양 만들기	만든 모양의 둘레의 길이

대단원 학습 평가

●○○
1 다음 중에서 옳은 것은?

① 9는 3의 양의 제곱근이다.
② -5는 -25의 음의 제곱근이다.
③ 양수 a의 제곱근은 $\sqrt{a}$이다.
④ 제곱근 11은 $\sqrt{11}$이다.
⑤ $\sqrt{(-7)^2}$의 제곱근은 ±7이다.

●●○
2 $0<a<3$일 때, $\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{a^2}$을 간단히 하시오.

●●○
3 다음 대화를 읽고, 자연수 x의 값을 모두 구하시오.

●○○
4 다음 수 중에서 무리수를 모두 찾으시오.

3.141592 $-\sqrt{21}$ π
$2.\dot{6}$ $\sqrt{\frac{25}{7}}$ $\sqrt{81}$

●●○
5 다음 중에서 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$일 때, $\sqrt{72}$를 a, b를 사용하여 바르게 나타낸 것은?

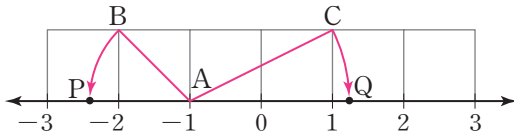
① ab ② ab^2 ③ a^2b^3
④ a^2b ⑤ a^3b^2

●●○
6 $x=\sqrt{7}$일 때, $2x$는 $\frac{1}{x}$의 몇 배인지 구하시오.

●●○
7 다음 수를 수직선 위의 점에 각각 대응시킬 때, 가장 왼쪽에 있는 수와 오른쪽에서 두 번째에 있는 수의 합을 구하시오.

-1 $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ $3-\sqrt{10}$ 2 $-1+\sqrt{5}$

정답 및 해설 ▸ 245쪽

●●○
8 다음 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이 위에 수직선을 그린 것이다. $\overline{AB}=\overline{AP}$, $\overline{AC}=\overline{AQ}$이고 두 점 P, Q에 대응하는 수를 각각 p, q라고 할 때, $q-p$의 값을 구하시오.

●●○
9 다음 중에서 옳은 것은?

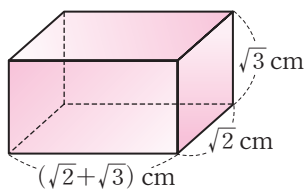
① $2\sqrt{6}\times3\sqrt{2}\div3=12$

② $\sqrt{28}\div\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{15}$

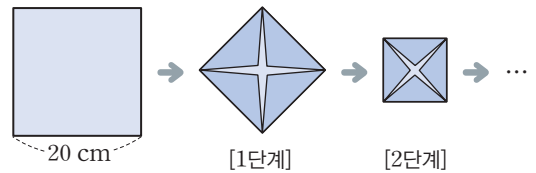
③ $\sqrt{32}+2\sqrt{18}-\sqrt{72}=3\sqrt{2}$

④ $\left(\sqrt{75}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\div\sqrt{3}=\frac{11}{2}$

⑤ $\sqrt{24}\times\sqrt{2}-9\sqrt{6}\div3\sqrt{2}=\sqrt{3}$

●●○
10 다음 직육면체의 겉넓이를 구하시오.

서술형 문제

[11~15] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

●●●
11 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 20 cm인 정사각형 모양의 색종이를 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 모양으로 접어 나갈 때, [4단계]에서 생기는 정사각형의 한 변의 길이를 구하시오.

●●○
12 $\sqrt{24-n}$이 정수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 모두 구하시오.

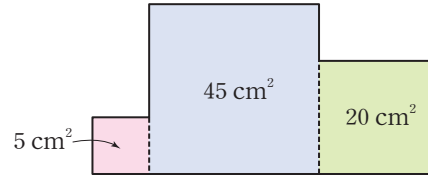
●●○
13 다음 세 학생의 계산 과정에서 각각 틀린 부분을 찾아 바르게 고치시오.

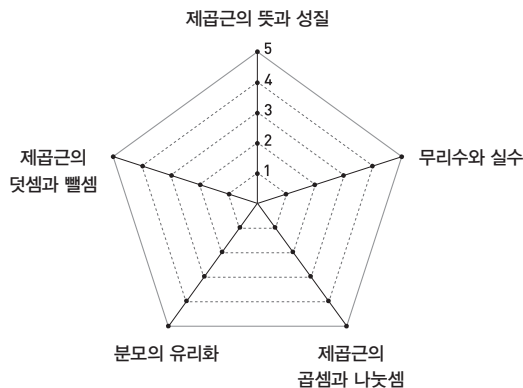
하은
$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=4\sqrt{5}$

서준
$-5\sqrt{2}=\sqrt{(-5)^2\times2}=\sqrt{50}$

소윤
$\sqrt{12}-\sqrt{3}=\sqrt{12-3}=\sqrt{9}=3$

14 어느 맑은 날, 해발 h m인 곳에서 사람의 눈으로 볼 수 있는 가장 먼 거리가 $\sqrt{12.6h}$ km라고 할 때, 해발 70 m인 전망대에서 사람의 눈으로 볼 수 있는 가장 먼 거리를 제곱근표를 이용하여 소수로 나타내시오.

15 다음 그림은 넓이가 각각 5 cm^2, 45 cm^2, 20 cm^{2}인 정사각형 모양의 색종이를 이어 붙인 것이다. 이 색종이로 이루어진 도형의 둘레의 길이를 구하시오.

자기 평가

1 이 단원에서 학습한 내용에 대한 나의 성취 수준을 다음 그림에 점으로 표시하고, 이웃한 점을 선으로 연결해 보자.

| 성취 수준 |

1수준: 개념을 이해하기 어려웠다.
2수준: 문제를 해결하기 어려웠다.
3수준: 문제를 일부 해결하였다.
4수준: 문제를 대부분 해결하였다.
5수준: 문제를 모두 해결하였다.

이해가 부족한 내용은 본문을 복습! 문제가 더 필요하면
수학 익힘책 ▶ 230~231쪽

2 이 단원을 시작할 때 세운 학습 계획을 잘 실천하였는지 평가해 보고, 이해하기 어려웠던 내용을 적어 보자.

홍길주의 제곱근 계산 방법

제곱근을 구하는 방법은 고대 중국의 수학책 “구장산술”에서 정사각형의 넓이가 주어졌을 때 그 한 변의 길이를 구하는 문제의 풀이법으로 나와 있는데, 이 풀이법을 ‘개방술’이라고 한다. 개방술은 조선 시대에도 제곱근을 구하는 일반적인 방법으로 사용되었다. 그러나 19세기 조선의 수학자 홍길주(1786~1841)는 개방술 대신 다음과 같은 계산 방법으로 제곱근을 구했다.

먼저 어떤 수 a의 제곱근을 구하려면 a를 2로 나눈 다음 1을 뺀다. 그리고 그 계산 결과에서 2를 빼고, 같은 방법으로 3, 4, 5, …를 차례로 뺀다. 어느 순간 더 이상 뺄 수 없게 되면 그 수를 2배한 후 빼고자 했던 수와 크기를 비교한다. 이때 두 수가 같으면 그 수가 바로 a의 제곱근이다.

예를 들어 289의 제곱근을 홍길주의 방법으로 구하면 다음과 같다.

홍길주의 방법으로 289의 제곱근 구하기

289를 2로 나눈다. ➔ $\frac{289}{2}=144.5$

1을 뺀다. ➔ $144.5-1=143.5$

2를 뺀다. ➔ $143.5-2=141.5$

⋮

16을 뺀다. ➔ $24.5-16=8.5$

(8.5에서 17을 뺄 수 없으므로)

2배한다. ➔ $8.5\times2=17$

17은 바로 빼고자 했던 수이므로 289의 제곱근은 17이다.

(참고 자료: 전용훈, “19세기 조선 수학의 지적 풍토: 홍길주(1786~1841)의 수학과 그 연원”)

수학 + 국어

페임랩(FameLab)은 과학, 수학, 공학의 주요 개념을 일반 청중도 쉽게 이해할 수 있도록 자신만의 독특한 소품 등을 이용하여 3분 안에 발표하는 대회이다.

수학 페임랩 발표 대본 예시

두 종류의 무한소수

지금 이 종이에 그려진 도형들 다음으로 어떤 도형이 나올까요?

삼각형? 네, 모두들 그렇게 생각하실 겁니다. 하지만, 짜잔!

이렇게 하트 모양이 숨어 있습니다. 어어, 화내지 마세요. 전 일정한 규칙에 의해 그려져 있다는 말을 하지 않았기 때문에 어떤 도형이든 나올 수 있습니다.

자, 이제 종이에 그려진 도형들을 0.381381⋯과 같은 수로 바꾸어 생각해 볼까요? 이 뒤에 어떤 숫자가 나올까요? 3이라고요? 사실 이것도 5라는 새로운 숫자가 나오게 될지 알 수는 없는 것이라고 생각합니다. 그래서 우리는 순환마디를 나타내는 방법으로 숫자 위에 점을 찍어 나타냅니다. 그러면 확실히 381이 반복되는 거지요. 마치 지하철 순환선을 탄 것처럼 계속 반복되고 순환되는 걸 볼 수 있습니다. 그리고 이 수는 분모가 0이 아닌 정수이고 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 있기 때문에 유리수라고 할 수 있습니다.

하지만, 이런 수는 어떨까요? 0.1010010001⋯. 이 뒤에 나올 숫자는 무엇일까요? 대부분 0이라고 하겠지요. 그러나 정답은 없습니다. 여러분이 맞았을 수도, 틀렸을 수도 있습니다.

그런데 만약 이 수가 순환소수가 아닌 무한소수라면 분모가 0이 아닌 정수이고 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 없습니다.

이러한 수를 무리수라고 합니다.

☆ 수학 페임랩 규칙 ☆

- 자신 있는 수학의 개념 중 하나를 선택하여 청중에게 창의적이면서도 수학적으로 쉽게 발표하기
- 프레젠테이션 프로그램을 사용하지 않고 단지 소품만을 이용하여 3분 안에 발표하기
- 발표가 끝난 후 청중에게 받은 질문에 답하기

수학 페임랩을 위한 대본을 작성한 후, 발표해 보자.

활동지 수학 페임랩을 위한 발표 대본 작성하기

■ 모둠명:

■ 모둠원:

1 이 단원에서 발표하고 싶은 수학 개념을 선정하여 다음 계획서를 작성해 보자.

발표 계획서

주제 소개	
주제 선정 이유	
주제와 관련된 수학 개념	
소품 사용 계획	

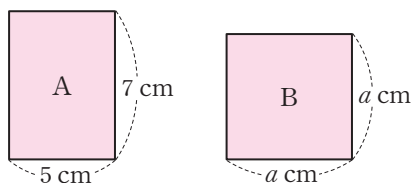
2 **1**에서 작성한 계획서를 바탕으로 수학 페임랩 제목을 정하여 대본을 작성하고, 발표해 보자.

동료 평가	활동에 적극적으로 참여하였는가?
	친구의 의견을 잘 듣고 존중하였는가?
	활동 과정에서 다양하고 좋은 의견을 많이 냈는가?
	활동 과정에서 서로 협력하였는가?

스스로 푸는 자기 주도 학습

수학 익힘책

●○○
1 $\sqrt{81}$의 음의 제곱근을 a, $\frac{49}{9}$의 양의 제곱근을 b라고 할 때, a, b의 값을 각각 구하시오.

●○○
2 다음 그림에서 가로와 세로의 길이가 각각 5 cm, 7 cm인 직사각형 A와 한 변의 길이가 a cm인 정사각형 B의 넓이가 같을 때, a의 값을 구하시오.

●○○
3 다음을 근호를 사용하지 않고 나타내시오.

(1) $\sqrt{64}$　　(2) $-\sqrt{15^2}$

(3) $\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2}$　　(4) $-\sqrt{0.09}$

●●○
4 다음을 계산하시오.

(1) $(-\sqrt{16})^2+(\sqrt{7})^2$

(2) $\sqrt{12^2}\div(-\sqrt{3^2})\times\sqrt{100}$

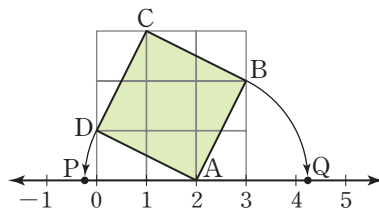
(3) $\sqrt{3^4}-\sqrt{(-2)^2}\times(-\sqrt{5})^2-\sqrt{144}$

●●●
5 두 실수 a, b에 대하여 $a-b>0$이고 $ab<0$일 때, 다음을 간단히 하시오.

$$a-\sqrt{(b-2a)^2}+\sqrt{16b^2}$$

●○○
6 다음 수 중에서 무리수의 개수를 구하시오.

$\sqrt{\frac{4}{25}}$　$\sqrt{3}-3$　$\sqrt{1.6}$　$1+\sqrt{9}$　π

●●○
7 다음 그림은 한 칸의 가로와 세로의 길이가 각각 1인 모눈종이 위에 수직선과 정사각형 ABCD를 그린 것이다. $\overline{AB}=\overline{AQ}$, $\overline{AD}=\overline{AP}$일 때, 두 점 P, Q에 대응하는 수를 각각 구하시오.

●●○
8 다음 두 실수의 대소를 비교하시오.

(1) $6-\sqrt{3}$, 4

(2) $-\sqrt{10}+5$, $-\sqrt{11}+5$

2. 근호를 포함한 식의 계산

정답 및 해설 ▸ 272쪽

●○○

1 $\sqrt{12}=a\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}=\sqrt{b}$일 때, $\sqrt{ab}$의 값을 구하시오.

●●○

2 $\sqrt{5.7}=2.387$, $\sqrt{57}=7.550$일 때, 다음 제곱근의 값을 소수로 나타내시오.

(1) $\sqrt{570}$

(2) $\sqrt{5700}$

(3) $\sqrt{0.57}$

(4) $\sqrt{0.057}$

●●●

3 $\sqrt{108a}=b\sqrt{2}$를 만족시키는 두 자리의 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값 중 가장 작은 것을 구하시오.

●●○

4 다음 보기 중에서 $\sqrt{18}\div\sqrt{3}$과 계산 결과가 같은 것을 모두 찾으시오.

• 보기 •

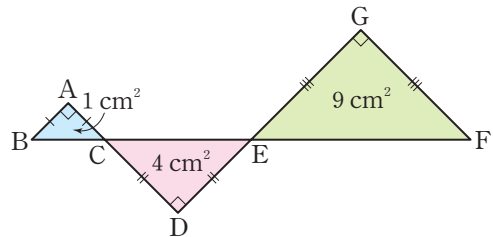
ㄱ. $\sqrt{3}\times\sqrt{2}$　　ㄴ. $\sqrt{42}\div\sqrt{6}$

ㄷ. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　　ㄹ. $\sqrt{2}+\sqrt{4}$

ㅁ. $\sqrt{54}-\sqrt{6}$　　ㅂ. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

●●●

5 다음 그림은 넓이가 각각 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2인 직각삼각형 3개를 빗변이 일직선상에 놓이도록 붙인 것이다. $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{DC}=\overline{DE}$, $\overline{GE}=\overline{GF}$일 때, $\overline{AD}+\overline{DG}$의 값을 구하시오.

●●○

6 다음 세 수 중에서 가장 큰 수를 a, 가장 작은 수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

$3\sqrt{2}-1$　　$2+\sqrt{2}$　　$2\sqrt{3}-1$

●●○

7 다음을 계산하시오.

(1) $6\sqrt{3}-\sqrt{125}-\frac{6}{\sqrt{3}}+\sqrt{20}$

(2) $2\sqrt{2}(2-\sqrt{8})+(4\sqrt{3}-2\sqrt{6})\div\sqrt{24}$

●●○

8 오른쪽 사다리꼴 ABCD의 넓이를 구하시오.